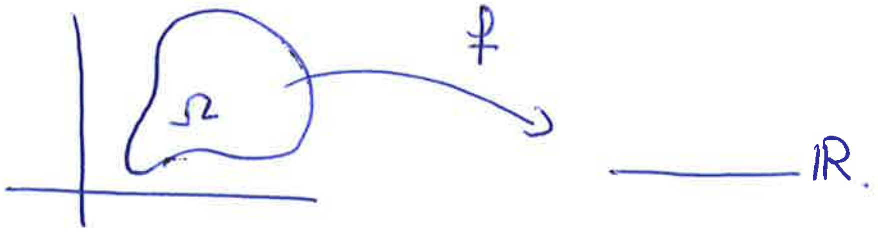
TEMA 14: INTEGRALES MÚLTIPLES

INTRODUCCIÓN. OBJETIVO DEL TEMA

Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, $n = 2$ ó 3.
$\qquad x \longmapsto f(x)$



objetivos:

1º) Definir el concepto de $\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, para Ω acotado.

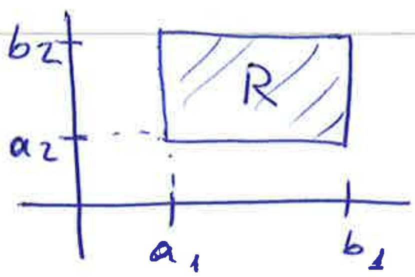
2º) Dar métodos "analíticos" y "numéricos" para calcular estas integrales.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL MÚLTIPLE

Caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo

<u>Def.</u> (Rectángulo en $\mathbb{R}^n$). Se llama rectángulo en $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de la forma

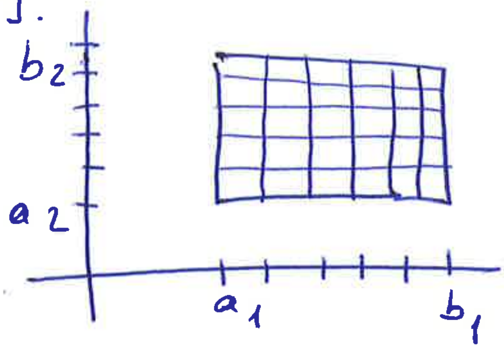
$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$



- Se llama área (ó medida) de R al número

$$\mu(R) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n - a_n)$$

- Sea $P_i = \{ a_i = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{m(i)}^i = b_i \}$ una partición del intervalo $[a_i, b_i]$. Se llama partición del rectángulo R a toda n-tupla $P = (P_1, P_2, .., P_n)$ donde P_i es una partición de $[a_i, b_i]$.



- Se llama ~~partición~~ norma de P a la mayor de las áreas (o medidas) de los subrectángulos que componen dicha partición, es decir,

$$\|P\| = \max\{ \mu(R_i) : R_i \in P \}$$

<u>Definición</u> (Integral múltiple)

Sea $f: R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, .., x_n) \longmapsto f(x)$$

una función acotada.

Se dice que f es integrable (en el sentido de Riemann) en R si existen y son iguales los dos límites siguientes:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) \min\{f(x) : x \in R_i\}$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) \max\{f(x) : x \in R_i\}$$

donde N = nº de subrectángulos de P.

Dichos límites se denotan por:

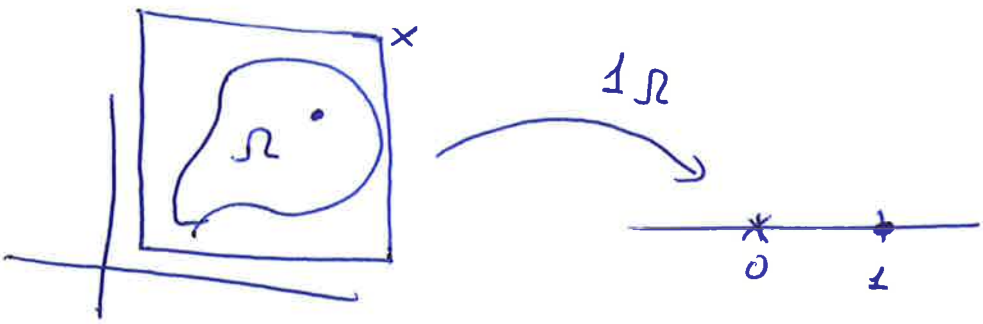
$n=2$ $\quad \int\int_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \left(\equiv \iint_R f(x,y)\,dA\right)$ ≡ integral doble ó de área

$n=3$ $\quad \int\int\int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \left(\equiv \iiint_R f(x,y,z)\,dV\right)$ ≡ integral triple ó de volumen

<u>Caso de conjuntos acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$</u>

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Consideremos la función característica de dicho conjunto,

$$1_\Omega(x) = \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Sea ahora R un rectángulo que contiene a Ω.
Se dice que f es integrable en Ω si la función

$$(f \cdot \chi_\Omega)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es integrable en Ω. Por tanto,

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \int_R (f \cdot \chi_\Omega)(x)\,dx.$$

Nota.– Se puede probar que la definición anterior no depende de la elección del rectángulo R.

Nota 2.– Las integrales múltiples tienen las mismas propiedades (linealidad, monotonía, etc..) que las integrales 1D.

¿Cómo se calcula de manera explícita (o numérica) una integral múltiple?

- Teorema de Fubini
- Teorema de Cambio de Variable.

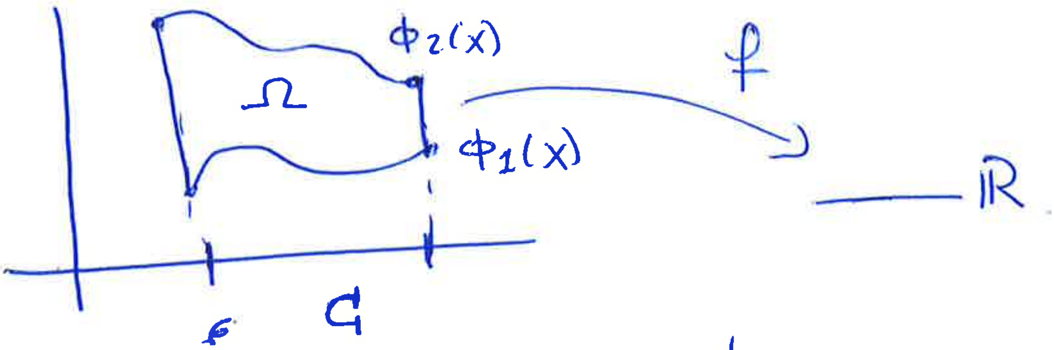
TEOREMA (Fubini)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto y $\phi_1, \phi_2 : C \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Consideremos el conjunto

$$\Omega = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}.$$

Si f es continua en Ω, entonces

$$\int_\Omega f(x;y)\,dx\,dy = \int_C \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx.$$

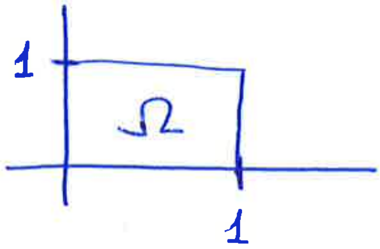


Nota.- Nótese que en el teorema anterior $x = (x_1, \dots, x_n)$.

El interés del teorema de Fubini es que permite reducir una integral múltiple en integrales reiteradas 1D para las cuales se pueden utilizar los métodos de integración 1D.

Ejemplo 1. Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ y consideremos la función

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^4 + y^4$$



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^4+y^4)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^4 y + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 dx$$

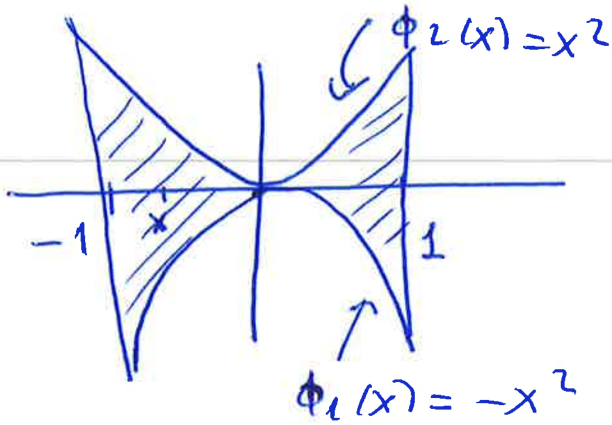
$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{5} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{1}{5} x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 2. $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \; -x^2 \leq y \leq x^2 \}$

$f(x,y) = x^2 - y$



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{x=-1}^{x=1}\left(\int_{y=-x^2}^{y=x^2}(x^2-y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\left[x^2y-y^2/2\right]_{-x^2}^{x^2}dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1} x^4-\frac{x^4}{2}-\left(-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=2\int_{x=1}^{x=1}x^4\,dx = 2\,\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE

Definición (Cambio de variable)

Se dice que la aplicación $\phi: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\phi=(\phi_1,\phi_2,..,\phi_n)$ es un cambio de variable si se cumple:

(a) ϕ es inyectiva

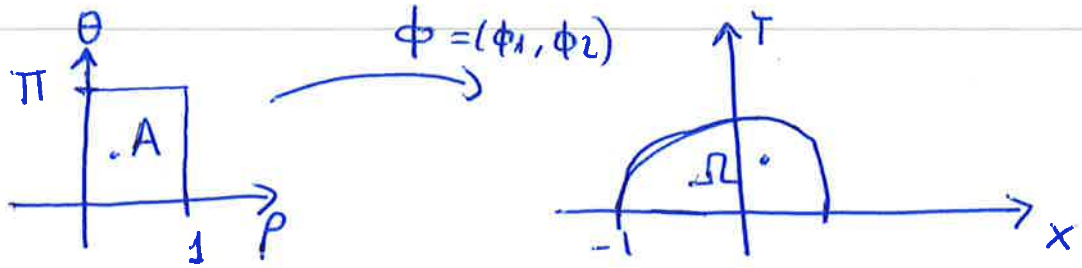
(b) ϕ es de clase C^1

(c) La matriz Jacobiana de ϕ es no singular, es decir,

$$\det\left(J\phi(u_1,..,u_n)\right)\neq 0 \quad \forall (u_1,..,u_n)\in A.$$

Ejemplo

Sea $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ y>0\}$.



$\phi_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$

$\phi_2(\rho,\theta) = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

Veamos que ϕ es un cambio de variable. En efecto:

(a) ϕ es inyectiva: Sean (ρ_1,θ_1), (ρ_2,θ_2) tales que

$$\phi(\rho_1,\theta_1) = \phi(\rho_2,\theta_2)$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1\cos\theta_1 = \rho_2\cos\theta_2\\ \rho_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = \rho_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2\end{array}\right\} \to \begin{array}{c}\rho_1^2\cos^2\theta_1 = \rho_2^2\cos^2\theta_2\\ \rho_1^2\,\mathrm{sen}^2\theta_1 = \rho_2^2\,\mathrm{sen}^2\theta_2\\ \hline \rho_1^2 = \rho_2^2 \to \rho_1 = \rho_2.\end{array}$$

pues $\rho_1,\rho_2 > 0$.

$\cancel{\rho_1}\cos\theta_1 = \rho_2\cos\theta_2 = \cancel{\rho_1}\cos\theta_2$

$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \to \theta_1 = \theta_2$ pues $0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi$.

(b) ϕ es C^1. De hecho $\phi \in C^\infty$, es decir, se puede derivar cuantas veces queramos.

(c) $$J\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\rho} & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\rho} & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\det(J\phi(\rho,\theta)) = \begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\,\mathrm{sen}^2\theta = \rho.$$

<u>Notación</u>.- Normalmente, al cambio de variable ϕ se suele denotar como

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ y la matriz jacobiana como $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$

TEOREMA (De cambio de Variable)

Supongamos que $\Omega = \phi(A)$, siendo $\phi : A \to \Omega$ un cambio de variable. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Si denotamos por

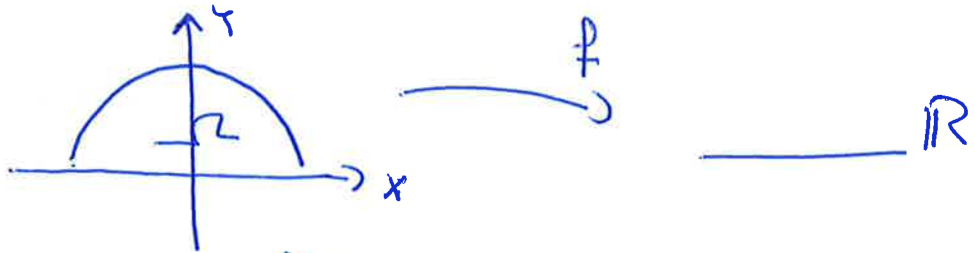
$$x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n), \quad x_2 = \phi_2(u_1, \dots, u_n), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n),$$

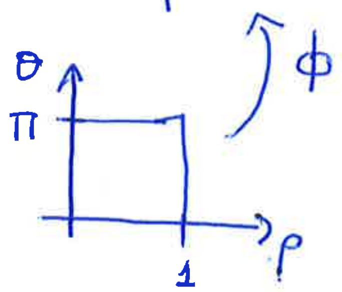
entonces la función $(f \circ \phi) \, |\det(J\phi)|$ es integrable en A y además se verifica la fórmula de cambio de variable

$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n = \int_A f(\phi(u_1, \dots, u_n)) \, |\det J(\phi(u_1, \dots, u_n))| \, du_1 \dots du_n.$$

Ejemplo 1

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, \ y > 0\}$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$





$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \theta < \pi \end{array}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix} \right| = \rho.$$

En Física se suele escribir : $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$

y se dice que el "elemento" de área en polares es $\rho\, d\rho\, d\theta$.

Por tanto,

$$\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{\text{T.C.V.}}{=} \iint_A e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1}\rho e^{-\rho^2}\,d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta$$

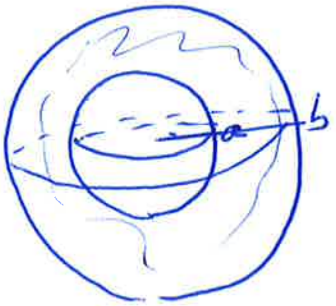
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^{0}\right)d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(e^{-1}-1\right).$$

Ejemplo 2

$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a^2<x^2+y^2+z^2<b^2,\ 0<a<b\}$

$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. Calcula $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.



Cambio a coordenadas esféricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi \\ y=\rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi \\ z=\rho\cos\phi \end{array}\right., \quad \boxed{\begin{array}{l} a<\rho<b \\ 0<\theta<2\pi \\ 0<\phi<\pi \end{array}} \equiv A$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{array}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^3\phi - \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi$$

$$-\left(\rho^2\cos^2\theta\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^3\phi\right)$$

$$= -\rho^2\,\mathrm{sen}^3\phi - \rho^2\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$= -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,(\mathrm{sen}^2\phi+\cos^2\phi) = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

$$\boxed{dx\,dy\,dz = +\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\; d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

elemento de volumen en esféricas.

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,dx\,dy\,dz \underset{\text{T.C.V.}}{=} \iiint_A (\rho^2)^{-\frac{3}{2}}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

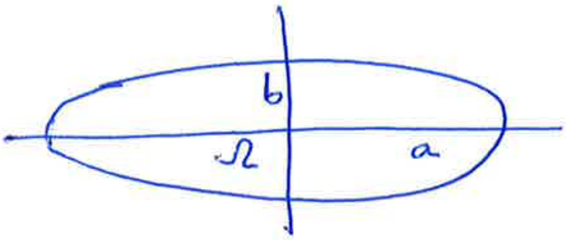
$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\phi=\pi}\mathrm{sen}\,\phi\left(\int_{\rho=a}^{\rho=b}\frac{1}{\rho}\,d\rho\right)d\phi\right)d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\phi=\pi}\mathrm{sen}\,\phi\,\log\rho\Big|_a^b\,d\phi\right)d\theta$$

$$= \log\frac{b}{a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}(-\cos\phi)\Big|_0^\pi\,d\theta$$

$$= \boxed{4\pi\log\frac{b}{a}}$$

Ejemplo 3 : Calcula el área de una elipse de semiejes a y b.



~~Ate~~ Área de la elipse $= \iint_{\Omega} dx\,dy$

Cambio de variable:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\, a \cos\theta \\ y &= \rho\, b \operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \iff$$

$$\frac{\rho^2 \cancel{a^2} \cos^2\theta}{\cancel{a^2}} + \frac{\rho^2 \cancel{b^2} \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{b^2}} < 1$$

$$\rho^2 < 1 : \boxed{\left.\begin{aligned} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \theta < 2\pi \end{aligned}\right\}} \equiv A.$$

$$\iint_{\Omega} dx\,dy \underset{\text{T.C.V.}}{\uparrow}{=} \iint_A \rho\, ab\, d\rho\, d\theta \underset{\text{Fubini}}{\uparrow}{=} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho a b\, d\rho\, d\theta =$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -\rho a \operatorname{sen}\theta \\ b \operatorname{sen}\theta & \rho b \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho a b \cos^2\theta + \rho a b \operatorname{sen}^2\theta = \rho a b.$$

$$\boxed{dx\,dy = \rho\, a b\, d\rho\, d\theta}$$

$$\to ab \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{1} d\theta = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \boxed{\pi a b}.$$